TEMPO DE PROVA: 2h.

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1 (2.5 pontos):
Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável em $(1, 2)$ tal que $f(1, 2) = 7$. Sabe-se também os valores das derivadas direcionais $D_u f(1, 2) = 11$ e $D_v f(1, 2) = -2$, onde $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ e $v = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

a) Calcule $\triangledown f(1, 2)$.

b) Ache a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, 7)$.

c) Qual o valor máximo que uma derivada direcional de f no ponto $(1, 2)$, avaliada em um vetor unitário, pode assumir?

Solução:

a) Seja $\triangledown f(1, 2) = (a, b)$. Como u e v são vetores unitários, segue que:

$$11 = D_u f(1, 2) = \triangledown f(1, 2) \cdot u = (a, b) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b$$

$$-2 = D_v f(1, 2) = \triangledown f(1, 2) \cdot v = (a, b) \cdot \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b$$

Daí, pode-se construir o sistema

$$\begin{cases} 3a + 4b = 55 \\ 4a - 3b = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 12b = 165 \\ 16a - 12b = -40 \end{cases} \Rightarrow 25a = 125 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 10\,.$$

b) Do item anterior, $f_x(1, 2) = 5$ e $f_y(1, 2) = 10$. Logo, a equação do plano tangente em $(1, 2, 7)$ é dada por

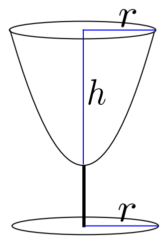
$$z - 7 = 5(x - 1) + 10(y - 2) \Rightarrow 5x + 10y - z - 18 = 0\,.$$

c) O valor máximo da derivada direcional em $(1, 2)$ é o valor do módulo do gradiente de f neste ponto, ou seja,

$$|| \triangledown f(1, 2)|| = ||(5, 10)|| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\,.$$

Questão 2 (2.5 pontos):
Temos uma taça, cujo topo é descrito por uma superfície de revolução, onde a altura h se relaciona com o raio r, via $h = cr^3$, para alguma constante c, veja figura abaixo. Temos que o volume é dado pela expressão abaixo:

$$V(r,h) = \frac{3\pi r^2 h}{5}$$
$$h = cr^3$$



Enchemos a taça com vinho suavemente, de modo que o volume, a altura e o raio do topo do líquido variam com o tempo t.

a) Usando que $h = cr^3$, encontre uma relação entre a taxa de variação da altura $h'(t)$, com a taxa de variação do raio $r'(t)$, em termos de $r(t), h(t)$ e da constante c.

b) Sabendo que enchemos a taça a uma taxa de volume constante igual a $\frac{\pi}{4} cm^3/s$ e que no instante em que a altura é $0,5cm$, medimos a taxa de variação da altura em $1cm/s$, determine o raio naquele instante e, consequentemente o valor da constante c que descreve o formato da taça.

Solução:

a) Como $h = cr^3$, podemos derivar em t para obter

$$h'(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(cr^3) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 3cr^2\frac{dr}{dt} = 3cr^2 r'(t)\ .$$

b) Derivando a expressão do volume, encontramos

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = \frac{6\pi r h}{5}r' + \frac{3\pi r^2}{5}h'\ .$$

Usando $h = cr^3$ e $h' = 3r^2 r'$,

$$V' = \frac{6\pi c r^4 r'}{5} + \frac{3\pi r^2 h'}{5} = \frac{(2r^2 + 3r^2)\pi h'}{5} = \pi r^2 h'\ .$$

Substituindo os dados do problema,

$$\frac{\pi}{4} = \pi r^2\ .$$

Como $r > 0$, vemos que $r = 1/2$. Assim,

$$\frac{1}{2} = c\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow c = 4\ .$$

Questão 3 (2.5 pontos):

Encontre e classifique os pontos críticos da função:

$$f(x,y) = \cos(x) + y^2 \,.$$

Solução:

Derivando parcialmente, temos que

$$f_x(x,y) = -\sin(x),\ \ f_y(x,y) = 2y \,.$$

Com isso, para satisfazer a condição de primeira ordem,

$$\sin(x) = 0,\ \ 2y = 0.$$

Daí, temos que $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, e $y = 0$. Logo, todos os pontos críticos são $P_k = (k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Resta estudar a condição de segunda ordem. Temos que

$$\begin{aligned} &f_{xx}(P_k) = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}, \\ &f_{yy}(P_k) = 2, \\ &f_{xy}(P_k) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$D = 2(-1)^{k+1},$$

que dividimos em casos. Temos que $D < 0$ se k é par, e em tal caso P_k é um ponto sela. Se k é impar, então $D > 0$, e em tal caso temos que $f_{xx}(P_k) > 0$, pelo que P_k é mínimo local.

Questão 4 (2.5 pontos):

Determine os valores extremos absolutos de $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ na região

$$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 + xy \leq 1\} \,.$$

Solução:

Como f é contínua e D um conjunto fechado e limitado, os valores extremos de f em D são atingidos. Primeiramente, observemos que $x^2 + y^2 \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo,

$$f(0,0) = 1 \text{ e } f(x,y) = e^{x^2+y^2} > e^0 = 1,\ \forall (x,y) \neq (0,0) \in D \,,$$

de modo que $P_0 = (0,0)$ é o ponto de mínimo absoluto de f em D. Resta analisar a fronteira de D, isto é, os pontos na curva $x^2 + y^2 + xy = 1$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 2xe^{x^2+y^2} = \lambda(2x+y) \\ 2ye^{x^2+y^2} = \lambda(2y+x) \\ x^2+y^2+xy = 1 \end{cases}$$

Note que $\lambda \neq 0$, pois em caso contrário, $x = y = 0$, o que contrária a terceira equação. Com isso,

$$\lambda = \frac{2xe^{x^2+y^2}}{2x+y} = \frac{2ye^{x^2+y^2}}{2y+x} \Rightarrow 2x(2y+x) = 2x(2x+y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x\,.$$

Substituindo essas possibilidades na terceira equação, obtemos

$$y = x \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$
$$y = -x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1\,, y \mp 1\,.$$

Temos, portanto, a considerar:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ P_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ P_3 = (1,-1) \text{ e } P_4 = (-1,1)\,.$$

Observando que

$$f(P_1) = f(P_2) = e^{2/3} \text{ e } f(P_3) = f(P_4) = e^2\,,$$

concluímos que $f(0,0) = 1$ é o mínimo absoluto e $f(1,-1) = f(-1,1) = e^2$ é o máximo absoluto.